

Desenvolvimento de um Modelo Matemático Aplicado ao Problema de Cobertura de Área em Redes Sem Fio

Maira De Vlieger, Sandro Sawicki, Rafael Frantz e Fabrícia Roos-Frantz

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Modelagem Matemática

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul

Ijuí – RS – Brasil

Resumo

O crescimento expressivo de dispositivos móveis e serviços associados, aliado a busca constante pela informação, seja ela pessoal ou empresarial, cria um novo paradigma, a Internet Móvel. Percebe-se, nesse sentido, que a infraestrutura empregada nas tecnologias de comunicação está em constante evolução. Assim, para se tirar proveito de todas essas facilidades oferecidas pelos dispositivos móveis e portáteis é necessário que a maioria dos locais possua cobertura de sinal. Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo matemático capaz de calcular a área de cobertura do sinal das antenas omnidirecionais. Para os experimentos utilizou-se a metaheurística *Simulated Annealing* (SA) com o objetivo de validar o modelo proposto. A metodologia de avaliação desta metaheurística foi adaptada para ser executada no modo clássico e também no modo guloso (*Greedy*). O modelo desenvolvido permite que a metaheurística atue com antenas de diferentes alcances. Com a validação do modelo matemático, foi desenvolvida uma ferramenta computacional em Linguagem C++ que incorporou todos os cenários das simulações. Os resultados experimentais mostram que o modelo de cobertura de sinal proposto auxilia na convergência da metaheurística em ambas as metodologias, *Simulated Annealing* Clássica e *Greedy*.

1 Introdução

Nos últimos anos a indústria da comunicação móvel vem se desenvolvendo em ritmo acelerado, não somente no ramo da telefonia, mas em tecnologias com suporte à mobilidade em geral. Os equipamentos se tornaram menores, mais confiáveis, com interfaces mais inteligentes e, principalmente, mais baratos. Percebe-se que os dispositivos com tecnologia sem fio, como computadores de mesa, computadores portáteis, telefones celulares, *tablets*, *Personal Digital Assistant* (PDAs) entre outros, estão presentes no dia-a-dia das pessoas, tanto no trabalho, como no lazer. Isso ocorre devido a capacidade de atender a vários objetivos, como por exemplo: acessar e-mail pelo próprio aparelho celular; conectar-se a internet com os computadores portáteis em locais públicos; comunicar-se com as pessoas mesmo estando geograficamente distantes com praticidade e segurança.

As redes sem fio (*wireless*) quando comparadas com as redes cabeadas, se destacam pela sua mobilidade, facilidade e rapidez de implantação, flexibilidade e baixo custo [1]. Ao contrário das redes cabeadas que utilizam como meio de transmissão de dados, por exemplo, fios de cobre ou fibra ótica. Segundo Sousa [2], as redes sem fio se referem a todo tipo de conexão efetuada sem fios visando a transmissão de dados via rádio frequência.

O protocolo 802.11, o qual é definido pelo IEEE (Instituto dos Engenheiros Elétricos e Eletrônicos), é utilizado como parte da infraestrutura das redes sem fio e apresenta diversos padrões, tais como, 802.11a, 802.11b, 802.11g, entre outros, utilizados no acesso a internet. Segundo Siliprande e Cortes [3], estas redes utilizam para a transmissão e recepção das informações ondas de rádio, isto tanto em ambientes fechados (*indoor*) como abertos (*outdoor*). As ondas de rádio são vistas como campos eletromagnéticos que são irradiados pela antena.

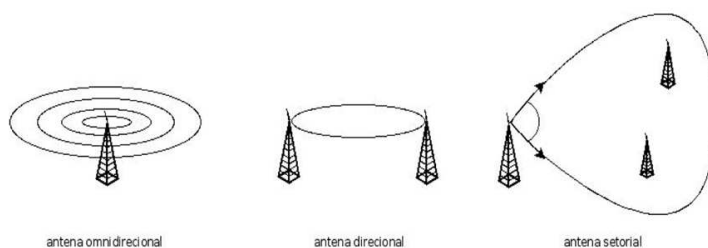
De acordo com Selada [4], a direção em que as ondas são propagadas vai depender do tipo de antena a ser utilizada, como exemplo, pode-se citar as an-

tenas omnidirecionais, semi-direcionais (setoriais) ou direcionais. Na Figura 1 são ilustrados os três tipos de antenas considerando seus ângulos de cobertura.

As antenas omnidirecionais propagam sinal em quase todas as direções, como são do tipo vertical, propagam em 360° em um feixe horizontal e não 360° verticalmente, obtendo, desta forma, uma área de cobertura no formato de um elipsoide e não de uma esfera. Pode-se comparar esta antena com uma lâmpada que ilumina igualmente em todas as direções. A antena isotrópica seria o modelo ideal de antena, mas ela existe somente na teoria, sua finalidade é servir como padrão de referência na medição de outras antenas.

A antena dipolo é uma antena omnidirecional, é a mais comum de ser encontrada e de ser projetada, devido a isso, está presente em vários dos pontos de acesso (*Acess Point*). Ela propaga o sinal igualmente em torno de seu eixo.

Figura 1. Tipos de antenas e seus ângulos de convergência;



Fonte: [5].

A operação dos dispositivos móveis necessita, exclusivamente, da cobertura de sinal. Para isso, a instalação de infraestruturas de redes sem fio passa a ser fundamental. Entretanto, a implantação não é uma tarefa simples quando se tem ambientes complexos, ou seja, locais que possuam barreiras físicas que dificultam a passagem e a qualidade do sinal. Neste caso, torna-se necessário um estudo detalhado do ambiente antes do posicionamento das antenas, o que dificilmente ocorre, sendo o processo realizado *in loco* por meio de tentativa e erro.

Neste trabalho desenvolveu-se um modelo matemático capaz de calcular a área de cobertura dos sinais gerados a partir da posição das antenas omnidirecionais sem considerar a interferência ou o bloqueio da propagação de sinal. Este modelo foi validado utilizando a ‘metaheurística *Simulated Annealing* [6], a qual avalia os resultados por meio de duas estratégias: clássica e *greedy*. Buscou-se, neste caso, encontrar a convergência da cobertura para a validação do modelo matemático proposto. Além disso, uma ferramenta gráfica e iterativa foi desenvolvida em Linguagem C++ para visualizar a evolução e a convergência do modelo quando executado por meio da metaheurística.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2, apresenta-se os trabalhos relacionados ao problema de posicionamento de antenas, sendo divididos em dois grupos: pontos de demanda pré-definidos e redes de sensores sem fio. Baseado na análise destes trabalhos, propõe-se, na seção 3, um modelo matemático para encontrar a cobertura de sinal gerada pelas antenas omnidirecionais. Na seção 4, analisa-se as simulações e os resultados experimentais. Na seção 5, discute-se as conclusões e trabalhos futuros.

2 Trabalhos Relacionados

O problema da área de cobertura em redes sem fio é abordado de diversas maneiras, sua variação age de acordo com as características da aplicação e, principalmente, dos objetivos e restrições impostas. Abaixo são apresentados alguns trabalhos que seguem o mesmo escopo do problema, entretanto com resoluções diferentes. Esses trabalhos foram classificados como: pontos de demanda pré-definidos e redes de sensores sem fio.

2.1 Pontos de demanda pré-definidos

De acordo com Arroyo e Marques [7], questões relacionadas à alocação de pontos de acesso, estão ligadas diretamente com os diversos meios da

telecomunicação, onde a posição correta destes equipamentos é fundamental para a qualidade no atendimento aos clientes e também para a redução dos custos com infraestrutura e manutenção. Os autores abordaram o problema de posicionamento de antenas de telecomunicações como um problema de localização de máxima cobertura, onde o objetivo é atender o maior número de pontos de demanda usando o mínimo de antenas. Consideram restrições de alcance, a presença de obstáculos e as antenas possuindo o mesmo custo e alcance de transmissão. Para a resolução deste problema utilizaram a metaheurística GRASP [8] básica e outra modificada. Quanto ao modelo matemático utilizado para a resolução tem-se:

$$f(x) = K \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{j=1}^m C_j a_j - \sum_{i=1}^n \min\{d_{ij} | j \in A, a_j = 1\} \quad (1)$$

onde: $B = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto de pontos de demanda, $A = \{1, \dots, m\}$ é o conjunto de pontos potenciais que podem ser alocados antenas ou facilidades (se no ponto $j \in A$ é alocada uma antena, então é dito que a facilidade j é aberta, caso contrário a facilidade j está fechada), C_j é o custo para abrir a facilidade j , d é o alcance de transmissão (raio de ação) de uma antena ou facilidade, a_j, b_i são as variáveis de decisão $\in \{0, 1\}$. Se a facilidade j é aberta tem-se $a_j = 1$, caso contrário $a_j = 0$ e $b_i = 1$ se o ponto de demanda $i \in B$ é atendido por uma facilidade aberta, caso contrário $b_i = 0$, $N_j = \{i \in B | d_{ij} \leq d\}$ é o conjunto de facilidades que podem atender ao ponto de demanda i , K é o peso que prioriza a cobertura dos pontos de demanda permitindo que a função objetivo seja sempre positiva.

A equação (1) representa a função objetivo, pois visa maximizar a cobertura dos pontos de demanda com o mínimo de antenas. Para isso, busca instalar as antenas o mais próximo dos pontos de demanda, usando o Modelo das p-medianas [9]. Quanto aos obstáculos, a presença de um deles implica na $d_{ij} = 1000d$.

Já Borges et al. [10], visando atender os mesmos objetivos de Arroyo

e Marques [7], trataram o problema de posicionamento de pontos de acesso de transmissão *wireless* por meio de algoritmos genéticos [11]. A presença de obstáculos implicou no acréscimo de mais uma variável no cálculo das distâncias entre os pontos de acesso e as demandas, a qual era proporcional ao tipo de obstáculo, pois pode-se encontrar: montanhas, morros, construções, as quais atenuam a passagem do sinal. A resolução para o problema aborda o seguinte modelo matemático:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{j=1}^m C_j A_j - \sum_{i=1}^n \min\{D_{ij}\} \quad (2)$$

onde,

d = Número de demandas atendidas;

C = Custo do ponto de acesso;

A = Número de pontos de acesso;

D = Distância (euclidiana) do ponto i ao ponto j .

Já Siliprande e Cortes [3], utilizaram como forma de resolução para o problema de localização de antenas para Internet a rádio um Modelo de Programação Linear Multi-objetivo, o qual baseia-se no Problema de Localização de Máxima Cobertura e utiliza o Modelo das p -medianas, sendo o primeiro, o mais adequado para representar problemas reais que, geralmente, envolvem vários objetivos a serem satisfeitos simultaneamente. Os objetivos na maioria das vezes são conflitantes, ou seja, ao otimizar um deles pode-se desfazer outro. Portanto, os autores buscaram, ao invés de uma única solução, um conjunto de soluções ótimas para o problema em questão.

O modelo proposto utilizado foi:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \min\{d_{ij} | j \in N_i, x_j = 1\}; \quad (3)$$

$$Max \sum_{i \in N} y_i; \quad (4)$$

$$Min \sum_{j \in M} c_j x_j; \quad (5)$$

onde,

$N_i\{j \in M | d_{ij} \leq S\}$ = é o conjunto de facilidades que atendem a um ponto de demanda i ;

$N\{1, 2, \dots, n\}$ = conjunto de pontos de demanda;

$M\{1, 2, \dots, m\}$ = conjunto de potenciais facilidades;

d_{ij} = distância entre a demanda i e a facilidade j ;

c_j = custo total para a instalação de antenas;

y_i = 1 se a área de demanda é coberta e 0 caso contrário;

x_i = 1 se a facilidade for localizada em j e 0 caso contrário.

A equação (3) representa a primeira função objetivo, utilizada para minimizar a distância entre cada demanda i e a facilidade j instalada. A equação (4) representa a segunda função objetivo, servindo para maximizar os clientes cobertos. Já a equação (5) representa a terceira função objetivo visando minimizar custos com a instalação destas antenas.

É perceptível que em ambos os trabalhos foi utilizado em sua resolução o Modelo das p -medianas. Este Modelo segundo Schilling et al. [9] é utilizado em diferentes contextos de modelagem, mas na maioria das vezes é visto no problema de localização de facilidades/instalações, onde um subconjunto de p instalações deve ser selecionado para minimizar as distâncias entre os vários pontos de demanda à sua instalação mais próxima.

O problema geral da p -mediana pode ser declarado da seguinte forma: dado um grafo $G = (V, E)$, (Onde V = o conjunto de vértices e E = o conjunto de arestas), busca-se encontrar um conjunto de vértices, S , de tamanho p , onde $S \subset V$, tal que a soma ponderada das distâncias dos vértices remanescentes

V-S para o conjunto S seja minimizada [9]. O problema das p-medianas tem a seguinte formulação:

$$\text{minimizar } Z = \sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} d_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

onde,

$i \in I$ = o conjunto de nós de demanda;

$j \in J$ = o conjunto de nós de potenciais facilidades;

a_i = demanda do nó i ;

d_{ij} = distância do nó i ao nó j ; $x_{ij} = \{ 1 \text{ se o nó é atribuído a instalação } j, 0 \text{ caso contrário} \}$.

Borges et.al. [10] destacam que o problema de localização de facilidades pode ser visto como sendo NP-difícil. Portanto, são propostas inúmeras metaheurísticas para sua resolução. A solução ótima do problema seria, segundo Siliprande e Cortes [3], aquela onde as p instalações atendessem a todos os pontos de demanda, sendo a distância entre a demanda e a instalação mínima.

Os trabalhos relacionados descritos nesta seção consideram pontos de demanda pré-definidos, os quais necessitam de instalações capazes de cobrir cada um deles, diferente da abordagem proposta neste trabalho, o qual busca encontrar, a partir de uma área pré-estabelecida, um modelo matemático capaz de calcular a área de cobertura das antenas baseado somente em suas coordenadas de centro e propagação do sinal (raio). A partir desta formulação é que propõe-se o desenvolvimento de uma ferramenta de posicionamento de antenas utilizando a metaheurística *Simulated Annealing*.

2.2 Redes de Sensores sem Fio

A área de cobertura também é considerada no estudo de redes de sensores sem fio (RSSF), que segundo Nakamura [12] é um tipo especial de rede *Ad Hoc* composta por dispositivos autônomos e compactos com capacidade de senso-

riamento, processamento e comunicação, denominados nós sensores. Em seu trabalho, Nakamura apresentou dois modelos dinâmicos de programação linear inteira mista para resolver o problema dinâmico de cobertura e conectividade em RSSF planas. Objetivando a garantia de cobertura e conectividade da rede em intervalos de tempo pré-definidos buscando minimizar o consumo de energia.

Para o problema em questão, foram considerados dois modelos de posicionamento dos nós, um determinístico e outro não-determinístico, onde no primeiro os nós foram colocados na área de monitoramento em posições pré-definidas e no outro lançados na área. Portanto, a área de cobertura neste caso significa a garantia de que estes pontos serão cobertos pelos nós sensores. Nakamura considerou para a formulação do problema uma área plana e sem obstáculos, neste caso, toda a área do círculo de raio R em torno do sensor seria coberta. Buscando então minimizar o número de nós ativos para garantir a cobertura dos pontos de demanda, obteve a seguinte função objetivo:

$$\min \sum_{i \in S} EA_i y_i + \sum_{j \in D} EH_j h_j \quad (7)$$

onde,

S = conjunto de nós sensores;

D = conjunto de pontos de demanda;

EA = custo de ativação de um nó sensor, que representa o custo de energia na transição do estado inativo para o estado ativo;

EH = custo de não cobertura de ponto de demanda, que representa uma penalidade quando o ponto não é coberto;

y_i = variável de decisão que possui valor 1 se o nó i está ativo e 0 caso contrário;

h_j = variável que indica não cobertura do ponto de demanda j

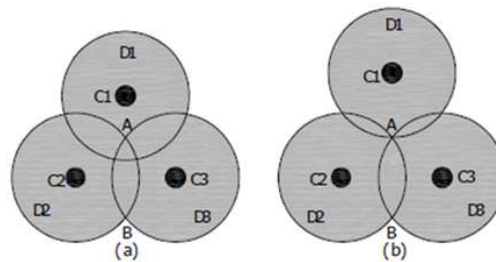
Esse trabalho é semelhante a proposta apresentada neste capítulo ao considerar uma área plana e sem obstáculos, porém trabalha com a cobertura de demandas pré-definidas, similar a seção anterior. Já o trabalho de Wang e

Zhang [13] se aplica na cobertura de redes de sensores sem fio. Os autores utilizam, de forma teórica, modelos matemáticos para encontrar a maior área de cobertura. Para isso, consideraram que a faixa de cobertura de um sensor fosse vista como um círculo, com raio r e área πr^2 e também que o raio de todos os sensores fossem iguais.

Para a resolução do problema consideraram o seguinte teorema:

Teorema: A topologia da área contínua de três perfeitos discos: $D1$, $D2$ e $D3$ é máxima e o seu valor é $\frac{4\pi+3\sqrt{3}}{2}r^2$ se três círculos: $C1$, $C2$ e $C3$ correspondentemente cercando, $D1$, $D2$ e $D3$ se cruzam em um ponto e, o $\Delta C1C2C3$ é um triângulo equilátero. Prova do teorema em Wang e Zhang [13].

Figura 2. Ilustração do teorema [13]

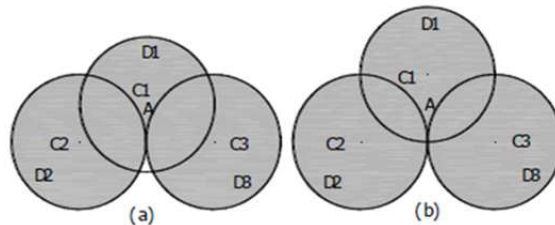


O teorema apresentado e ilustrado na Figura 2 letra (a) demonstra que a distância entre os centros forma um triângulo equilátero. Assim, consegue-se aumentar a área de cobertura ao máximo, como ilustrado na Figura 2 letra (b).

Com este mesmo propósito, Wang e Zhang [13] consideraram outro caso de sobreposições como mostrado na Figura 3, onde ao invés de ter um triângulo equilátero como distância entre os centros, tem-se um triângulo isósceles, Figura 3 letra (a). Para encontrar a área máxima (Figura 3, letra b) obtiveram o seguinte resultado $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

O modelo apresenta uma questão importante, tem uma semelhança quanto

Figura 3. Ilustração do problema de Wang e Zhang [13]



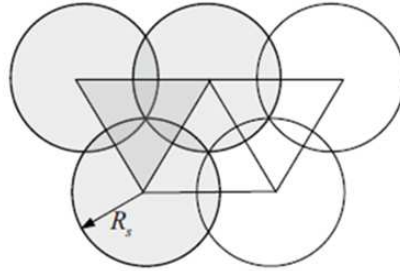
a escolha da faixa de cobertura do sinal, onde também se utilizará esta faixa como sendo um círculo de raio r , mas torna-se inviável pois trabalha apenas com antenas de mesma potência, ou seja, círculos com mesmo raio, diferentemente da solução proposta neste capítulo a qual pode trabalhar com antenas de potências iguais ou diferentes. Considerando ainda as redes de sensores sem fio, Negahdar et al. [14] obtiveram um método para diminuir o excesso de áreas cobertas (sobreposições) com um algoritmo de seleção simples, a fim de cobrir a porcentagem desejada utilizando um número mínimo de sensores ativos e atingindo, portanto, um maior tempo de vida para toda rede.

Os autores demonstraram que ao calcular a diferença entre a área de círculos e a área de triângulos, como mostrado na Figura 4, encontra-se a sobreposição mínima precisa entre os círculos, cuja área efetiva é $\frac{3\sqrt{3}}{4}r_s^2$ $\frac{0,5\pi r_s^2$

Já para obter o número mínimo de nós para cobrir a área de campo, a dividiram pela efetiva de cada círculo $\frac{400}{0,82[\pi*r_s^2]}$

A proposta de Negahdar et.al. [14] é encontrar uma sobreposição mínima entre os nós sensores a fim de cobrir a área utilizando um número menor deles. Já neste capítulo, o objetivo é testar a convergência do modelo matemático encontrado para calcular a área de cobertura das redes sem fio, independente da quantidade de sobreposições, raios e número de antenas posicionadas.

Figura 4. Ilustração da diferença entre a área de círculos e a área de triângulos [14]



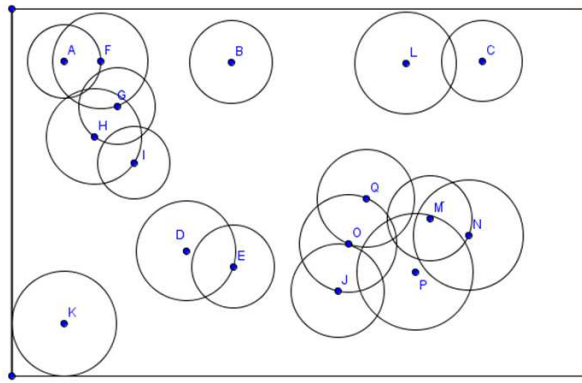
3 O Modelo Matemático Proposto para a Cobertura de Sinais

Para o problema do posicionamento e da área de cobertura das antenas, a modelagem matemática se faz presente, pois trata-se de uma tecnologia de informação presente na sociedade, com ela é possível modelar matematicamente o problema e simulá-lo, até mesmo, antes de sua implantação final. Esta seção descreve em detalhes a formulação do modelo de cobertura de sinais proposto neste trabalho.

3.1 Área de Cobertura

A área de cobertura compreende a ocupação do sinal das antenas em uma determinada área. Na Figura 5, uma representação aleatória da cobertura do sinal de antenas é ilustrada. Nela, considera-se um cenário em duas dimensões, onde as antenas propagam seu sinal sem nenhuma atenuação, ou seja, não existem barreiras que dificultem a passagem do sinal. Percebe-se que a posição de cada antena é representada pelo centro e a propagação do sinal pelo raio de um círculo.

Figura 5. Representação de posições aleatórias de antenas representadas por círculos



Observa-se, também, que as antenas estão dispostas aleatoriamente, sendo possível perceber duas situações distintas: antenas isoladas e antenas agrupadas. Quando as antenas estão isoladas, o cálculo torna-se simples, sendo a área de uma Antena Isolada (AI) representada por:

$$AI = \pi r^2, \quad (8)$$

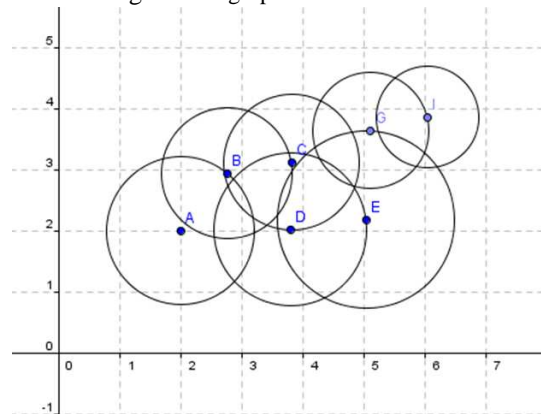
e o somatório de todas as áreas destas antenas representada pela equação:

$$\overline{AI} = \sum_{i=1}^u AI_i, \quad (9)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, u$ e u é a quantidade de antenas isoladas. Essa situação ocorre, pois uma antena isolada e sem atenuação de sinal, vista em um plano bidimensional, pode ser representada por um círculo.

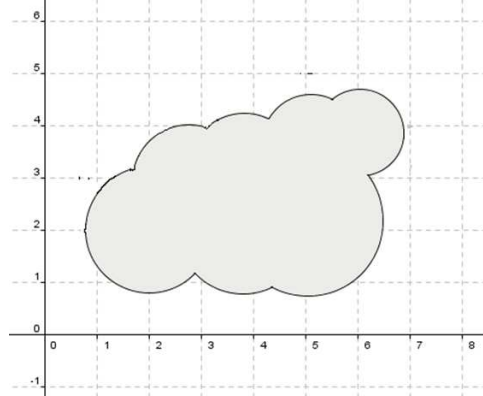
Quando as antenas encontram-se agrupadas, a situação torna-se diferente. Na Figura 6, o agrupamento de antenas é ilustrado e percebe-se, nesse caso, um grande volume de sobreposições.

Figura 6. Agrupamento de Antenas



Nesta situação, para se encontrar a área de cobertura não basta calcular o somatório da área de todas as antenas, conforme equação (9), nem mesmo as áreas de sobreposições, e sim a área de ocupação representada na Figura 7.

Figura 7. Agrupamento de antenas considerando a área de ocupação



Assim, para se obter a área de cobertura desta região (similar a uma nuvem), utilizou-se o cálculo de integrais, visto que historicamente a integração surgiu da necessidade de se calcular área de figuras compostas por linhas curvas, ou seja, não retilíneas como é o caso da área apresentada na Figura 7. Uma área compreendida entre curvas tem o seguinte conceito segundo Boulos [15]:

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções contínuas no intervalo $[a, b]$, tais que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para todo x no intervalo considerado, então a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad (10)$$

Entende-se que a área procurada é a diferença da área sob o gráfico de $f(x)$ e da área sob o gráfico de $g(x)$ no intervalo $[a, b]$.

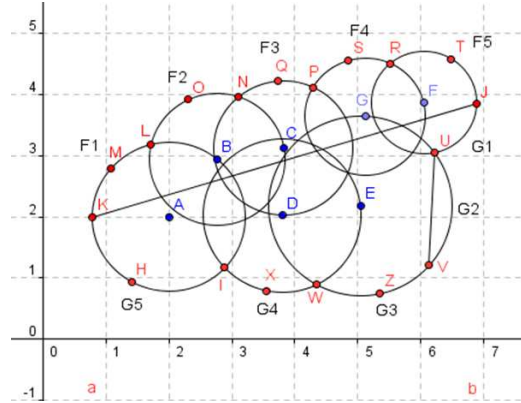
Na Figura 8 é representada a área efetiva a ser calculada considerando a nuvem (Figura 8), bem como as informações que serão necessárias para efetuar o cálculo considerando o conceito de Boulos [15].

Ao aplicar o cálculo de integrais, considerando a Figura 8, define-se duas áreas a serem calculadas, a área A_1 , dada por:

$$A_1 = \int_a^b \sum_{i=1}^n F(x)_i dx \quad (11)$$

onde, $F(x)_i$ representa as funções acima do ponto de corte \overline{KJ} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e n é a quantidade de funções superiores. Com esta fórmula obtém-se o cálculo da área considerando as curvas superiores ao ponto de corte até o eixo x em um limite de integração de a até b . Em seguida determina-se uma área A_2 , dada por:

Figura 8. Área efetiva da nuvem considerando as informações necessárias para o cálculo da área de cobertura



$$A_2 = \int_a^b \sum_{j=1}^m G(x)_j dx \quad (12)$$

onde, $G(x)_j$ representa as funções abaixo do ponto de corte (\overline{KJ}) , $j = 1, 2, 3, \dots, m$ e m é a quantidade de funções inferiores. Com esta fórmula será possível calcular a área considerando as curvas inferiores ao ponto de corte até o eixo x , em um limite de integração de a até b . Portanto, para encontrar a área desejada, a qual representa a área de cobertura das antenas agrupadas, ou seja, área da nuvem representada por AN, realiza-se o seguinte cálculo:

$$AN = A_1 - A_2 \quad (13)$$

Como pode-se ter mais de uma área em formato de nuvem, precisa-se de um somatório destas áreas, sendo a equação (13) reescrita da seguinte forma:

$$\overline{AN} = \int_{i=1}^s AN_i, \quad (14)$$

onde $i = 1, 2, 3, \dots, s$ é a quantidade de nuvens.

Para se chegar a equação (14) é necessário vários procedimentos, os quais serão detalhados a seguir, considerando a Figura 8:

Assim, para iniciar a modelagem do cálculo da área da nuvem torna-se necessário, inicialmente, encontrar as funções $(F_1 \dots F_n)$ e $(G_1 \dots G_m)$ que descrevem cada uma das curvas externas e, para isso, é fundamental se obter, no mínimo, três pontos pertencentes a cada uma das curvas, bem como definir um ponto de corte, que se trata de uma reta traçada sobre a área de cobertura, com o objetivo de delimitar quem é a $F(x)$ e quem é a $G(x)$, mas para isso é necessário satisfazer a condição de existência das funções que formam a periferia da nuvem. Este corte considera o menor e o maior valor de x .

Quando a condição de existência da função não for satisfeita, ou seja, ocorrer o fato de se ter dois valores de y para um mesmo valor de x , como observado na Figura 8 no círculo E (segmento \overline{UV}), então se considera uma reta entre o primeiro valor de y que se repete e, ao invés do segundo valor de y que esta se repetindo, considera-se, nesse caso, o ponto seguinte a ele.

O algoritmo desenvolvido para encontrar a área de cobertura inicia realizando uma varredura da área pelo menor valor de x buscando encontrar os três pontos pertencentes a cada uma das curvas $(F_1 \dots F_n)$ e $(G_1 \dots G_m)$, onde em cada curva os pontos extremos são ou a intersecção entre uma antena e o ponto de corte (\overline{KJ}) , ou a intersecção entre duas antenas (L, N, P, R, ...); já o ponto intermediário (M, O, Q, ...) será determinado como um valor que se encontra entre os pontos extremos. Para a definição destes três pontos, torna-se necessário o conhecimento dos 360 pontos pertencentes à circunferência a partir do centro e do raio realizando o seguinte procedimento:

Considerar a equação da circunferência:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2, \quad (15)$$

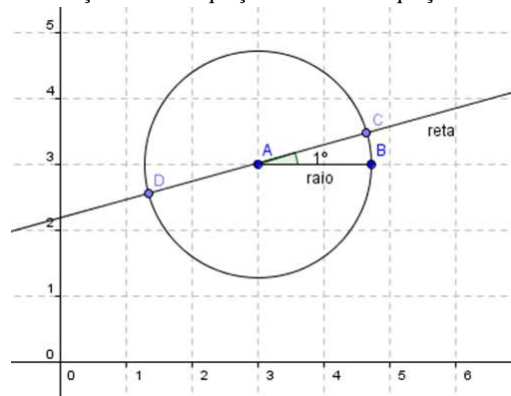
sendo (a_1, b_1) o centro da circunferência e r o raio.

Para cada ângulo de abertura, partindo de um ângulo de 1° e aumentando 1° a cada passo. Considera-se, nesse modelo, a equação da reta que faz intersecção com a circunferência:

$$y = cx + d; c \neq 0, \quad (16)$$

onde, $c = \text{tg}(\alpha)$ e d é o coeficiente linear, sendo encontrado substituindo o centro da circunferência na equação (16). Tal procedimento está especificado na Figura 9.

Figura 9. Intersecção entre a equação da reta e a equação da circunferência



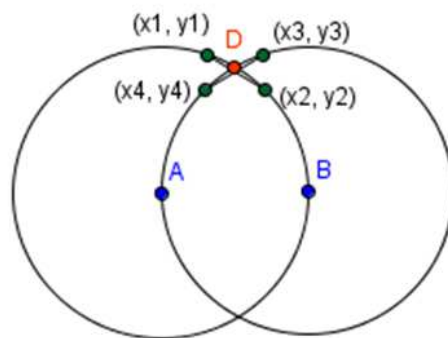
Resolver o sistema formado pela equação da reta e a equação da circunferência:

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \\ y = cx + d \end{cases} \quad (17)$$

Com a resolução deste sistema, são encontradas as coordenadas (x,y) dos pontos pertencentes à circunferência. Neste caso, são realizados 360 cálculos para cada antena alocada, descobrindo um ponto para cada ângulo de abertura. Estes pontos serão armazenados em uma estrutura de dados, para que se possa comparar com os demais pontos das outras antenas contidas na área, com o objetivo de descobrir os pontos de intersecção.

Com os 360 pontos de cada antena já encontrados, à medida que o algoritmo percorre a periferia da área de cobertura, busca-se, através dos dados armazenados, os pontos de intersecção definidos anteriormente (i.e., entre duas antenas e entre uma antena e o ponto de corte), através do cálculo do ponto de intersecção entre duas retas, representado na Figura 10:

Figura 10. Ponto de intersecção entre duas retas



A reta 1, denominada r , contém os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . Com estes dois pontos monta-se um sistema, $\begin{cases} c_1 x_1 + d_1 = y_1 \\ c_1 x_2 + d_1 = y_2 \end{cases}$, resolvendo-o encontra-se os valores de c_1 e d_1 , os quais formarão a equação da reta representada por:

$$c_1x + d_1 = y \quad (18)$$

A reta 2, denominada s , contém os pontos (x_3, y_3) e (x_4, y_4) . Estes dois pontos formam o seguinte sistema, $\begin{cases} c_2x_3 + d_2 = y_3 \\ c_2x_4 + d_2 = y_4 \end{cases}$, o qual ao ser resolvido determinará os valores de c_2 e d_2 , que, por sua vez, formarão a seguinte equação da reta:

$$c_2x + d_2 = y \quad (19)$$

Com as equações das retas (18) e (19), monta-se novamente um sistema do qual resultará o ponto de interseção (D) entre as duas retas:

$$\begin{cases} c_1x + d_1 = y \\ c_2x + d_2 = y \end{cases} \quad (20)$$

Assim, serão encontrados sempre dois pontos de interseção pertencentes a cada uma das curvas, já o ponto intermediário será determinado pelo vetor que armazena os 360 pontos pertencentes a circunferência de cada antena, por um valor que se encontra entre os dois pontos interseção.

Encontrados os três pontos pertencentes a cada uma das curvas que compõe a área de cobertura, encontra-se uma função de 2º grau, dada por: $F(x) = mx^2 + nx + p$, onde os pontos obtidos são denominados (z_1, w_1) , (z_2, w_2) e (z_3, w_3) .

Monta-se, então, um sistema com os três pontos:

$$\begin{cases} mz_1^2 + nz_1 + p = w_1 \\ mz_2^2 + nz_2 + p = w_2 \\ mz_3^2 + nz_3 + p = w_3 \end{cases} \quad (21)$$

Resolve-se o sistema escrito na forma matricial, $A\bar{x} = b$, encontrando os valores de m , n e p :

$$A\bar{x} = b$$
$$\begin{pmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 \\ z_3^2 & z_3 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Com os valores de m , n e p pode-se montar cada função de segundo grau $F(x)$:

$$F(x) = mx^2 + nx + p \quad (23)$$

Com estas funções é possível calcular a área de cobertura da nuvem dada pela equação (13), detalhada anteriormente. Para se obter a área de cobertura (AC) considerando o posicionamento de todas as antenas, tem-se o somatório das áreas isoladas representado pela equação (9), acrescido do somatório das áreas em formato de nuvem dado pela equação (14)), como segue abaixo:

$$AC = \overline{AI} + \overline{AN} \quad (24)$$

4 Resultados Experimentais

5 Cenários

Para a realização das simulações e extração dos resultados experimentais foram criados cinco cenários, todos eles consideram o número de antenas, o alcance de sinal de cada antena, as estratégias de perturbação, métodos de avaliação e

a área que necessita de cobertura. É importante ressaltar que os cenários criados visam contemplar parâmetros necessários para a simulação, entretanto, flexíveis de mudança em qualquer momento da execução. Utilizou-se como padrão para todos os cenários uma área com necessidade de cobertura equivalente a $800.000m^2$.

Trabalhou-se com antenas de propagação de sinal iguais (raios iguais) e também com antenas com propagação de sinal de diferentes alcances (raios diferentes). Para as antenas com raios iguais, considerou-se um alcance de 100 metros (raio igual a 100). Enquanto que para as antenas com alcances diferentes, utilizou-se a seguinte regra: inicia-se com uma antena com alcance de 10 metros, aumentando proporcionalmente 5 metros para as demais antenas posicionadas. Por exemplo, para 10 antenas, a primeira inicia com 10 metros de alcance, a segunda 15 metros, a terceira 20 metros e concluirá a décima antena com 55 metros de alcance, partindo do centro (raio igual a 55).

Percebe-se uma variação de estratégias nas colunas referentes ao método de avaliação e tipo de perturbação. O método de avaliação trata da forma como a metaheurística vai interpretar o modelo matemático de cobertura de sinal proposto por este trabalho. Utilizou-se uma avaliação gulosa (*Greedy*) que aceita sempre resultados melhores do que o anterior e também uma estratégia baseada no método clássico de cristalização de metais (têmpera simulada, SA) ou *Simulated Annealing*, o qual considera a temperatura como um dos critérios para aceitar uma nova solução. Já o tipo de perturbação é a forma como as antenas trocam de posição. Nesse caso, as perturbações podem ser: simples, livre e baseada em UDG. A troca simples permite que apenas uma antena altere sua posição quando solicitado; a troca livre permite que todas as antenas alterem sua posição ao mesmo tempo quando solicitado e a troca baseada em UDG é similar a simples, entretanto, a distância entre os centros das antenas deve ser igual ao valor do raio.

Em cada cenário foram utilizados seis grupos de simulações contendo, respectivamente, 10, 15, 20, 25, 30 e 35 antenas. Para cada teste foram realizadas

5 repetições, sendo a média dos resultados analisada e avaliada, testando a convergência da metaheurística perante a área de cobertura.

É importante ressaltar que o processo de cobertura inicia com todas as antenas posicionadas no mesmo centro, caracterizando-se no pior caso de cobertura. Com o início das simulações, o modelo matemático de cobertura de sinal (equação 17) é usado na função de custo (função objetivo).

6 Simulações e Resultados

Os resultados experimentais foram extraídos a partir dos cenários descritos nas Tabelas 1, 2 e 3. Todos os cenários, além da metaheurística *Simulated Annealing* com os métodos de avaliação SA Clássica e *Greedy* foram implementados na Linguagem C++. Para cada teste foram executadas 5 repetições, sendo que a análise e avaliação dos resultados ocorreram com a média aritmética desses valores. Para cada simulação, gerou-se relatórios contendo a posição física final das antenas, o alcance do sinal (raio), as dimensões da área utilizada para as simulações, a área coberta, a área não coberta e a área efetiva. A Tabela 1 apresenta todos os resultados da perturbação simples com raios iguais, utilizando as estratégias *Greedy* e SA Clássica. Os valores encontrados na estratégia de perturbação simples com a metodologia SA Clássica variam em média 1,22% , mas, não mais que 2,40%, já os valores encontrados nas repetições com a metodologia *Greedy* variam em média 1,80% e no máximo 3,08%.

A Tabela 2 descreve os dados referentes ao cenário 2, o qual considera raios iguais, perturbação livre e os métodos *Greedy* e SA Clássica. Ressalta-se que a perturbação livre troca a posição de todas as antenas sempre que a função de custo é avaliada. A diferença percentual dos valores das 5 repetições de cada um dos testes considerando a estratégia de perturbação livre utilizando a metodologia SA Clássica variam em média 2,10%, limite superior de 3,13%. Já considerando a metodologia *Greedy* estes valores variam em média 1,58% e no máximo 3,41%.

Tabela 1. Dados experimentais da área de cobertura (m^2) do cenário 1 - raios iguais, perturbação simples e estratégias *Greedy* e SA Clássica

Raios	Cenários	Perturbação	Número de Antenas					
			10	15	20	25	30	35
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	313.643	462.885	581.710	667.654	714.989	738.022
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	313.646	464.206	587.160	666.012	711.487	741.475
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	313.647	467.647	594.188	648.429	700.372	738.696
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	313.645	466.999	593.840	652.444	713.332	739.666
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	313.652	466.998	593.842	662.448	714.213	741.687
Desvio Padrão			3,36	2.080,15	5.561,60	8.513,02	6.016,47	1.635,12
Média			313.646,60	465.747	590.148	659.397,40	710.878,60	739.909,20
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	313.648	467.144	580.083	656.313	717.854	731.892
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	313.644	468.921	591.052	649.780	704.543	734.671
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	313.645	465.329	599.893	664.672	722.613	737.279
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	313.646	464.503	586.184	658.303	701.180	733.555
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	313.647	458.450	575.241	646.768	713.950	725.508
Desvio Padrão			1,58	3.973,14	9.593,42	7.089,70	8.991,42	4.412,76
Média			313.646	464.869,40	586.490,60	655.167,20	712.028	732.581

Tabela 2. Dados experimentais da área de cobertura (m^2) do cenário 2 - raios iguais, perturbação livre e estratégias *Greedy* e SA Clássica

Raios	Cenários	Perturbação	Número de Antenas					
			10	15	20	25	30	35
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	311.045	403.791	478.697	529.881	578.015	593.322
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	303.576	410.278	494.011	534.383	570.700	603.106
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	300.787	406.590	490.386	538.997	578.849	615.857
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	299.776	421.110	479.123	529.624	574.506	604.421
Raios Iguais	Cenário 1	Simples SA	301.845	411.557	477.661	554.614	577.755	609.264
Desvio Padrão			4.495,99	6.593,57	7.633,61	10.306,87	3.375,39	8.309,12
Média			303.405,80	410.665,20	483.975,60	537.499,80	575.965	605.194
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	304.090	409.080	484.628	523.763	578.497	611.348
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	306.089	398.056	469.868	527.906	574.183	605.324
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	305.115	415.508	484.014	522.200	574.478	606.414
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	302.771	425.355	486.933	528.462	575.561	601.559
Raios Iguais	Cenário 1	Simples Greedy	297.739	408503	473.881	531.458	575.489	605.860
Desvio Padrão			3.271,26	10.042,48	7.510,08	3.743,56	1.707,67	3.497,16
Média			303.160,80	411.300,40	479.864,80	526.757,80	575.641,60	606.101

A Tabela 3 apresenta um resumo da média aritmética de cobertura no posicionamento de antenas com raios iguais e antenas com raios diferentes, consi-

derando as estratégias de perturbação e os métodos de avaliação.

Tabela 3. Representação das médias de área de cobertura (m^2) para todos os cenários

Raios	Cenários	Perturbação	Número de Antenas					
			10	15	20	25	30	35
Raios Iguais	Cenário 1	Simple SA	313.646,60	465.474	590.148	659.397,40	710.878,60	739.909,20
Raios Iguais	Cenário 1	Simple Greedy	313.646	464.869,40	586.490,60	655.167,20	712.028	732.581
Raios Iguais	Cenário 2	Livre SA	303.405,80	410.665,20	483.975,60	537.499,80	575.965	605.194
Raios Iguais	Cenário 2	Livre Greedy	303.160,80	411.300,40	479.864,80	526.757,80	575.641,60	606.101
Raios Iguais	Cenário 3	UDG SA	286.175,60	440.073,60	555.009,60	642.990	704.041,20	721.772,40
Raios Iguais	Cenário 3	UDG Greedy	299.335,80	443.866,80	552.660,20	634.847,40	695.458	720.936,20
Raios Diferentes	Cenário 4	Simple SA	39.550,30	117.247,50	258.654,90	480.746,60	704.317,40	756.806,60
Raios Diferentes	Cenário 4	Simple Greedy	39.549,50	116.648,20	259.639,40	480.173,30	686.423,80	755.703,30
Raios Diferentes	Cenário 5	Livre SA	39.549,50	117.242,80	252.504	420.717,60	556.967,20	632.278,60
Raios Diferentes	Cenário 5	Livre Greedy	39.550,20	117.242,70	252.843	415.370,10	553.070,80	624.277,90

É importante ressaltar que o problema de alocação de antenas pode ter inúmeras soluções, caracteriza-se como um problema da classe NP. Neste caso, a metaheurística se utiliza de uma informação para convergir para uma boa solução (no caso esta informação é o modelo de cobertura de sinal), pois dificilmente, em um tempo computacional polinomial, encontrará uma solução ótima a medida que o número de antenas aumenta. É o que ocorre com a área de cobertura efetiva e a área de cobertura final encontrada. Como os algoritmos são parametrizáveis, com um número maior de iterações, os resultados poderiam chegar a soluções ainda melhores. Entretanto, neste trabalho pretende-se validar o modelo de cobertura, interessando o comportamento da metaheurística diante desta proposta.

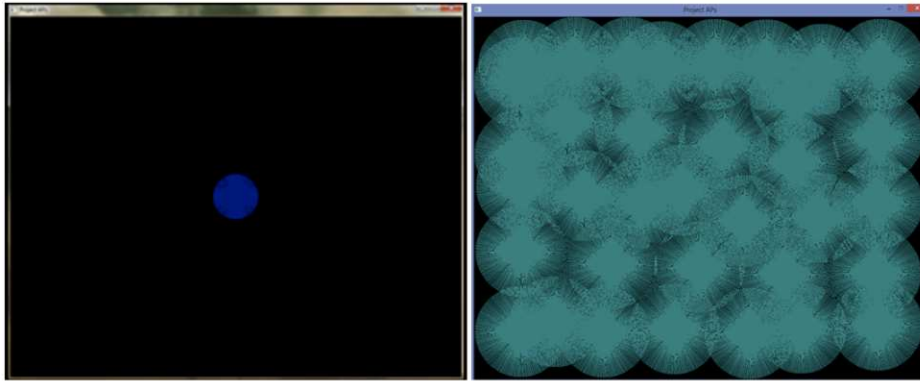
A área efetiva compreende o posicionamento das antenas sem que haja sobreposições entre elas, portanto, para saber a área de cobertura basta somar as áreas das antenas, não sendo necessária a utilização do modelo matemático. De acordo com os cenários propostos, a área efetiva para raios diferentes é maior do que para raios iguais. Como mencionado, busca-se validar o modelo de cobertura de sinal, o número de iterações da metaheurística foi reduzido com o objetivo principal de observar a convergência da cobertura.

Ao comparar a média da área de cobertura final obtida com a área de cober-

tura efetiva das antenas, considerando agora antenas com diferentes alcances, observa-se novamente que as áreas são muito próximas quando considerado o posicionamento de poucas antenas. O que não ocorre com o posicionamento de um número maior de antenas, devido a não ocorrência de vazamento de sinal e das sobreposições entre as antenas.

A convergência da Metaheurística *Simulated Annealing* com vistas aos diferentes cenários pode ser melhor visualizada através da ferramenta computacional desenvolvida especialmente para a resolução deste problema. Nela apresenta-se o posicionamento físico com as informações das áreas das antenas. As Figuras 11 e 12 mostram o posicionamento inicial das antenas (todas no mesmo centro) e o posicionamento final após a execução da Metaheurística.

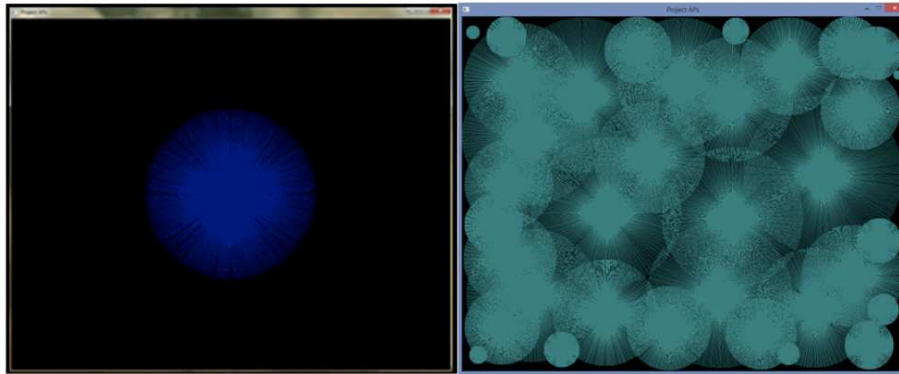
Figura 11. Posicionamento inicial e final de 35 antenas com raios iguais, perturbação simples e método Greedy



7 Conclusões e Trabalhos Futuros

O principal objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático para encontrar a área de cobertura de sinais em redes sem fio. Considerou-se como exemplo os sinais das antenas omnidirecionais com iguais e diferentes alcan-

Figura 12. Posicionamento inicial e final de 35 antenas com raios diferentes, perturbação simples e método SA Clássico



ces. Como forma de validação deste modelo utilizou-se a metaheurística *Simulated Annealing*, a qual avaliou o modelo por meio de duas estratégias; SA Clássica e *Greedy*. Avaliando, neste caso, a convergência da cobertura para a validação do modelo matemático proposto.

Os resultados experimentais mostraram que o modelo matemático de cobertura de sinal proposto neste trabalho, auxilia na convergência da metaheurística para ambos os cenários avaliados, ou seja, para ambas as metodologias de avaliação e tipos de perturbação utilizados. Esta convergência está relacionada com a quantidade de área de cobertura; percebe-se que quanto mais antenas forem utilizadas maior será a área de cobertura.

Quanto aos métodos de avaliação, o SA Clássico quando comparado com o *Greedy* se mostrou mais eficiente em termos de cobertura, em 66,7% de todos os testes realizados. Considerando o posicionamento de poucas antenas (10, 15 e 20 antenas), os métodos se equivalem, pois o método SA Clássico se mostrou melhor em 53,3% dos testes em comparação aos 46,7% do método *Greedy*. Mas, considerando o posicionamento de mais antenas (25, 30 e 35 antenas), o

método SA Clássico se destaca, pois é mais eficiente em termos de cobertura em 86,7% dos testes, restando 13,3% ao Greedy. Este comportamento ocorre porque o método *Greedy* pode tomar algumas decisões precipitadas no momento da avaliação considerando sua função de custo. Neste caso, pode ficar preso em mínimos locais.

Para os cenários criados, conclui-se, também, que a maior qualidade na cobertura ocorre quando são utilizadas antenas de diferentes raios. Nos experimentos, percebeu-se que independente do método utilizado, essas antenas preenchem as extremidades da área. Por exemplo, a área coberta pelo modelo proposto, considerando raios iguais, com perturbação simples e método SA Clássico, obteve, em média, 92,49% de ocupação. Já considerando o mesmo método e perturbação, porém raios diferentes, a ocupação do sinal foi, em média, de 94,60%.

Quanto a futuros trabalhos que possam dar continuidade a esta investigação, pode-se citar os seguintes tópicos: (a) acrescentar barreiras físicas na área a ser coberta; (b) permitir um limite de vazamento de sinal, melhorando desta forma a cobertura da área; (c) aplicar o modelo considerando outras formas de área; (d) utilizar outras técnicas de otimização.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior) pela ajuda financeira.

Referências

- [1] M. Gast and M. Loukides, “802.11 wireless networks: The definitive guide,” *O’Reilly Associates*, 2002.
- [2] L. Sousa, “Redes de computadores: Dados, voz e imagem,” *Erika, São Paulo*, p. 484, 2002.
- [3] M. Siliprandi and J. Cortes, “Problema de localização de antenas de transmissão para internet a rádio no município de itaperuna,” *In: Encontro Nacional de Engenharia de Produção, ENEGEP*, pp. 1–11, 2008.
- [4] R. Selada, “Redes wireless de banda larga,” *Dissertação de Mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real*, 2008.
- [5] A. Peres, “Mecanismo de autenticação baseado na localização de estações sem fio padrão 802.11,” *Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Rio Grande do Sul*, 2005.
- [6] S. Kirkpatrick and M. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science*, no. 220, pp. 671–680, 1983.
- [7] J. A. T. Marques, “Heurística grasp aplicada ao problema de alocação de antenas de transmissão,” *In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, SBPO*, pp. p. 1345–1356, 2006.
- [8] T. Feo and M. Resende, “Greedy randomized adaptive search procedures,” *Journal of Global Optimization*, 1995.
- [9] A. Schilling and C. Revelle, “Network distance characteristics that affect computational effort in p-mediana location problems,” *In: European Journal of Operacional Research*, pp. 525–536, 2000.
- [10] S. B. et at., “Ferramenta computacional para alocação de pontos de acesso wireless utilizando algoritmos genéticos,” *In: Engenharia de Produção: Expansão com Qualidade e Interface com o Mercado, EMEPRO*, 2001.

- [11] D. Goldberg, "Genetic algorithms in search, optimization and machine learning," *Addison-Wesley Professional*, 1989.
- [12] F. Nakamura, "Planejamento dinâmico para controle de cobertura e conectividade em redes de sensores sem fio planas," Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Minas Gerais, 2005.
- [13] X. Wang and S. Zhang, "Research on efficient coverage problem of node in wireless sensor," *In: Second International Symposium on Electronic Commerce and Security, ISECS*, 2009.
- [14] M. Negahdar and M. Mapar, "Adaptive method for decreasing over-covered areas in wireless sensor networks," *In: The Fourth International Conference Wireless and Mobile Communications*, 2008.
- [15] P. Boulos, "Cálculo diferencial e integral," *Makon Books*, vol. 1, 1999.